ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE, AND MANAGEMENT



УДК 539.182; 519.632 DOI 10.12737/22156

Применение численных фундаментальных решений в методе точечных источников поля*

С. Ю. Князев[1], **Е. Е. Щербакова**[2**]
[1, 2]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Application of the numerically obtained fundamental solutions in the field point-source method***

S. Yu. Knyazev[1], **E. E. Shcherbakova**[2**]
[1, 2] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Целью работы является получение интегрального уравнения, с помощью которого, используя известное фундаментальное решение другого уравнения, возможно численным методом найти фундаментальное решение линейного уравнения эллиптического типа. Вводится понятие численного фундаментального решения (ЧФР). Полученные таким образом численные фундаментальные решения (ЧФР) могут быть использованы при решении краевых задач для уравнений эллиптического типа различной размерности с помощью метода точечных источников поля (МТИ). Результатом работы является создание эффективного численного метода решения краевых задач с использованием ЧФР. Это позволяет расширить круг решаемых с помощью МТИ задач. Таким образом, МТИ выступает в качестве универсального численного метода при решении краевых задач для линейных уравнений эллиптического типа. Особенно эффективно применение предложенного способа при решении трехмерных задач Дирихле для уравнений со сферически симметричными фундаментальными решениями. В качестве тестовой задачи предложенным способом решено уравнение Шредингера для одномерного квантового осциллятора. Показано, что, используя фундаментальные решения уравнения Шредингера, полученные численно, удается найти собственные значения и собственные функции квантового осциллятора. Найденные собственные функции осциллятора соответствуют известным аналитическим решениям квантовой задачи. В качестве другого тестового примера решается двумерная краевая задача для уравнения Гельмгольца. В этом случае предварительно находится численное фундаментальное решение для уравнения Гельмгольца. Вычислены зависимости погрешности численного решения от числа узлов в области решения задачи. На основании полученных результатов делается вывод о перспективности предложенного численного метода.

The work objective is to obtain an integral equation by which, using the known fundamental solution to the other equation, it is possible to find a fundamental solution to the linear elliptic equation. The concept of a numerical fundamental solution (NFS) is introduced. The so obtained numerical fundamental solutions (NFS) can be used for solving boundary value problems for N-dimensional elliptic equations by the field point source method (PSM). The research result is the development of the effective numerical method for solving boundary value problems using the NFS. This allows expanding the range of solvable problems using PSM, making PSM a universal numerical method for solving boundary value problems for linear elliptic equations. It admits solutions to various types of boundary value problems. Especially effective is the use of the proposed method for solving three-dimensional Dirichlet problems for equations with spherically symmetric fundamental solutions. The Schrödinger equation for a one-dimensional quantum oscillator is solved by the proposed method as a test problem. It is shown that it is possible to find the eigenvalues and eigenfunctions of the quantum oscillator using numerically obtained fundamental solutions to the Schrödinger equation. The oscillator eigenfunctions obtained by the proposed method are in good agreement with the known analytical solutions to quantum problems. Then, as another test example, a two-dimensional boundary value problem for the Helmholtz equation is solved. In this case, it is necessary to obtain a numerical fundamental solution to the Helmholtz equation first. Dependences of the numerical solution error on the nodes number in the problem solution domain are calculated. Upon the results obtained, the following conclusion is made. The results of solving test problems confirm the efficiency of the proposed numerical method.

Ключевые слова: фундаментальное решение, метод фундаментальных решений, метод точечных источников, метод интегрированных источников, дискретные источники.

Keywords: fundamental solution, method of fundamental solutions, point source method, integrated sources method, discrete sources.

Введение. Метод точечных источников поля (МТИ) является одним из эффективных методов моделирования физических полей (например, электрических и магнитных) в технических (в том числе электромеханических) устройствах [1–4]. Для указанного метода характерна высокая точность численного решения и чрезвычайная простота ком-

*Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
**E-mail: ksy@donpac.ru, sherbakovaee@mail.ru
***The research is done within the frame of independent R&D.

пьютерной реализации [5–9]. Наилучшие результаты получены при использовании МТИ для моделирования физических полей, описываемых однородными линейными уравнениями эллиптического типа с известными фундаментальными решениями, задаваемыми аналитически. Такими уравнениями являются уравнение Лапласа, уравнение Гельмгольца, бигармоническое уравнения, некоторые другие типы уравнений. Применение МТИ в этом случае позволило решить значительное число прикладных задач по моделированию, например: стационарных электрических, магнитных [8–10], тепловых, концентрационных полей [11–14], полей упругих напряжений [15–17]. МТИ успешно применяется также при численном решении краевых задач для неоднородных уравнений, таких как уравнение Пуассона [18–19], неоднородное уравнение Гельмгольца [19–21]. Однако во всех случаях использования МТИ предполагается известным фундаментальное решение соответствующего уравнения математической физики. Это резко ограничивает круг решаемых с помощью МТИ задач. Тем не менее, и в этом случае возможно решение краевых задач с помощью МТИ, если предварительно найти численные значения фундаментальных решений при определенных значениях параметров. Назовем фундаментальное решение, заданное численно, численным фундаментальным решением (ЧФР). Ниже описан метод нахождения ЧФР для линейных уравнений эллиптического типа и показывается возможность использования этих решений в МТИ.

Интегральное уравнение для дополнительной составляющей фундаментального решения. Пусть фундаментальное решение $g(r)$ линейного уравнения эллиптического типа $LU=0$ известно. Требуется найти фундаментальное решение $G(r)$ уравнения типа $(L+l)U=0$. Здесь L и l — линейные операторы эллиптического типа. Представим искомое фундаментальное решение $G(\mathrm{r})$ в виде

$$G(r)=g(r)+u(r). \tag{1}$$

Здесь $u(r)$ — искомая функция. Назовем $g(r)$ основной составляющей, а $u(r)$ — дополнительной составляющей фундаментального решения $G(r)$.

В соответствии с определением фундаментального решения справедливо соотношение

$$(L+l)G=\delta(r) \ .$$

Подставим в это выражение (1). В результате получим

$$(L+l)(g+u)=\delta(r),$$

или

$$Lg+Lu+\mathrm{lg}+lu=\delta(r). \tag{2}$$

Так как $Lg=\delta(r)$ ($g(r)$ есть фундаментальное решение уравнения $LU=0$), то уравнение (2) запишем в виде

$$Lu=-\mathrm{lg}-lu \ . \tag{3}$$

Правую часть этого уравнения будем рассматривать как плотность заряда $\rho(r)$ неоднородного уравнения $Lu=\rho(\mathrm{r})$. Тогда частное решение неоднородного уравнения (3) можно записать в виде

$$u(r)=\int g(r,R)\rho(R)d\Omega_R$$

или в виде

$$u(r)+\int\limits_{\Omega} g(r,R)lu(R)d\Omega_R=-\int\limits_{\Omega} g(r,R)lg(R)d\Omega_R \ . \tag{4}$$

Областью интегрирования в (4) может быть шар радиусом R_0, который заключает в себя область ω задачи, решаемой с помощью искомого фундаментального решения.

Уравнение (4) допускает численное решение. В результате находятся приближенные значения для ЧФР в узловых точках области $\Omega\supset\omega$. Эти значения можно использовать при решении задачи Дирихле с помощью, например, МТИ. При решении задачи Неймана или краевой задачи третьего рода наряду со значениями фундаментального решения необходимо иметь возможность вычисления нормальных производных фундаментального решения на границе области ω или частных производных по координатам. Для вычисления частных производных можно воспользоваться соотношением (4). Например, продифференцировав (4) по координате *x*, получим

$$\frac{\partial u(r)}{\partial x}=-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial g(r,R)}{\partial x}l\big(u(R)+g(R)\big)d\Omega_R \ . \tag{5}$$

Аналогичное соотношение можно получить для частной производной дополнительной составляющей фундаментального решения по координате *y* и по координате *z* (при решении трехмерных задач). Используя найденные значения функции $u(\mathrm{r})$ в узлах области Ω с помощью численного интегрирования в правой части соотношения (5) можно вычислить приближенные значения частной производной дополнительной составляющей фундаментального решения в любой точке области Ω и использовать эти значения при численном решении краевой задачи.

Фундаментальные решения уравнения Шредингера. В качестве простейшего примера найдем фундаментальные решения одномерного уравнения Шредингера, описывающего колебания квантового осциллятора. Пусть частица массой *m* совершает упругие колебания с частотой ω и энергией *E*. Уравнение Шредингера запишем в виде [22]

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi ,$$

а после замены переменных $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \to x$ запишем как

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2}{\hbar\omega}E\psi=x^2\psi \text{ , или как}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+e\psi=x^2\psi , \qquad (6)$$

где $e=\frac{2}{\hbar\omega}E$.

Здесь операторами *L* и *l*, фигурирующими в (2)–(4), будем считать $L=\frac{d^2}{dx^2}$ и $l=-x^2$. Как известно, фундаментальное решение уравнения $\frac{d^2\psi}{dx^2}+e\psi=0$ равно $g(x)=\frac{\sin\left(\sqrt{e}|x|\right)}{2\sqrt{e}}$ [23]. Классически допустимая область движения осциллятора ограничивается отрезком $[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$, поэтому в качестве области решения для квантового осциллятора можно взять отрезок $\omega=\left[-\sqrt{e},\sqrt{e}\right]=[-l,l]$, а областью интегрирования в (4) считать, например, отрезок $\Omega=[-1{,}5\sqrt{e},\,1{,}5\sqrt{e}]=[-d,d]$. Тогда уравнение (4) запишется как

$$u(x)-\frac{1}{2\sqrt{e}}\int_{-d}^{d}\sin\left(\sqrt{e}|x-X|\right)X^2u(X)\,dX=\frac{1}{4e}\int_{-d}^{d}\sin\left(\sqrt{e}|x-X|\right)\sin\left(\sqrt{e}|X|\right)X^2dX . \qquad (7)$$

Обозначим интеграл в правой части интегрального уравнения (7) как $f(x)$. В данном случае функция $f(x)$ вычисляется аналитически. В более общем случае, если исходное дифференциальное уравнение имеет другой вид, функцию $f(x)$ находят численно.

Для численного решения уравнения (7) интеграл в левой части соотношения (7) представляют в виде интегральной суммы, используя тот или иной метод численного интегрирования. Если, например, используется простейший метод численного интегрирования, метод прямоугольников, то отрезок Ω разбивается на *N* элементарных отрезков.

Обозначим значения искомой функции $u(x)$ в некоторых, например, в средних точках x_i элементарных отрезков как u_i, где *i* — номер элементарного отрезка. В результате для величин u_i, будет получена система линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum a_{ij}u_j=b_i \text{, где } b_i=f(x_i),\ a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ -\frac{h_j}{2\sqrt{e}}\sin\left(\sqrt{e}|x_i-x_j|\right)x_j^2, & i\neq j.\end{cases}$$

Здесь h_j — длина элементарного отрезка с номером *j*.

После того как величины u_i найдены, значения искомого фундаментального решения в узлах x_i , т. е. ЧФР вычисляются с помощью формулы (1):

$$G(x_i)=g(x_i)+u_i .$$

Для дальнейшего удобно (но не обязательно), используя величины $G(x_i)$, получить интерполяционную формулу для фундаментального решения $G(x)$. Теперь можно приступить к нахождению решения уравнения (5) с помощью МТИ. Для этого справа и слева от области решения задачи, т. е. отрезка ω, в точках с координатами $z_l=-l-\delta x$ и $z_r=l+\delta x$ размещаются заряды q_l и q_r, моделирующие искомое поле ψ(*x*) в области ω. Здесь δ*x* — удаленность за-

рядов, моделирующих поле ψ(x), от границ области ω. Разумеется, должно выполняться условие $l+\delta x\le d$, т. е. точки z_l и z_r не должны выйти за пределы области Ω. Искомое решение представляем как суперпозицию полей двух точечных зарядов, т. е. в виде соотношения

$$\psi(x)=q_l G(l+x+\delta x)+q_r G(l-x+\delta x). \tag{8}$$

Для окончательного решения задачи необходимо найти величины зарядов q_l и q_r , используя два каких-либо дополнительных условия, накладываемых на волновую функцию ψ(x). Очевидно, что физический смысл имеют только четные и нечетные волновые функции. Отсюда следует, что заряды q_l и q_r либо равны друг другу ($q_l=q_r=q$), либо имеют противоположные знаки ($q_l=-q_r=q$). Величину заряда q следует выбрать так, чтобы удовлетворить условию нормировки волновой функции, например, потребовав, чтобы максимальное по абсолютной величине значение волновой функции в области решения ω равнялось единице.

Известно [22], что решение уравнения (6) имеет реальный физический смысл не при любых значениях энергии E, т. е. параметра e, а только при $E=\frac{\hbar\omega}{2}e=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$, где квантовое число n может принимать только целочисленные значения, начиная с нуля. Только при этих значениях квантового числа волновая функция на бесконечности обращается в ноль. Очевидно, что при этом на границах области решения волновая функция будет иметь значения заметно меньшие, чем при других, не целочисленных значениях числа n.

Назовем величину $K=1/\left(\left|\psi(-l)\right|+\left|\psi(l)\right|\right)$ критерием задачи. На рис. 1 представлен график зависимости критерия задачи K от энергии частицы, точнее, от числа n, которое изменяется в пределах от 0 до 10. Находились четные решения уравнения Шредингера. Вычисления проводились при числе узлов в области Ω N = 100.

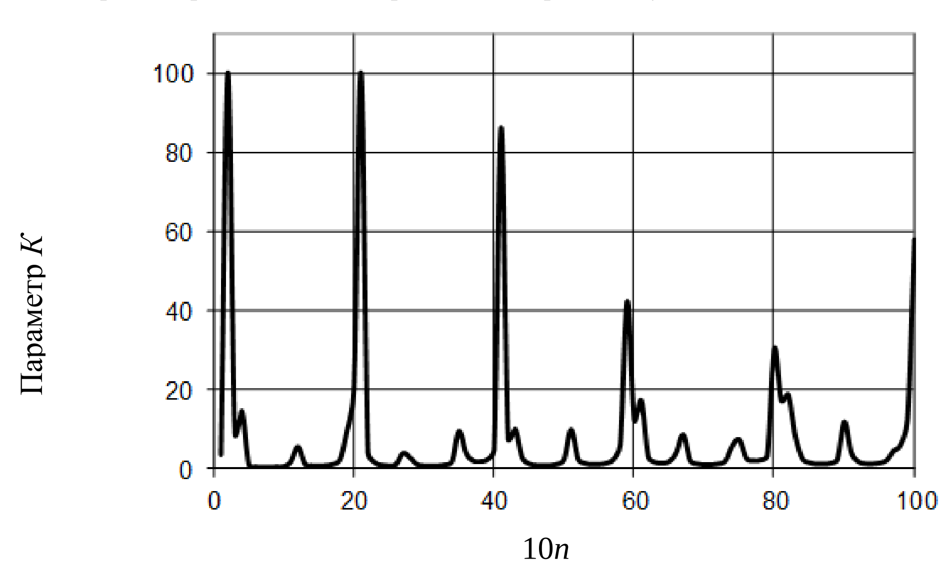


Рис. 1. Зависимость параметра $K=1/\left(\left|\psi(-l)\right|+\left|\psi(l)\right|\right)$ от квантового числа n

Из рис. 1 видно, что максимумы на кривой соответствуют значениям квантового числа n, близким к 0, 2, 4, 6, 8 и 10. Это в точности согласуется с известными результатами квантовой теории для собственных значений энергии и для состояний осциллятора с четными волновыми функциями. Соответствующая зависимость K = K(n), полученная для нечетных волновых функций, имеет максимумы при нечетных целочисленных значениях квантового числа n.

Решение уравнения Шредингера (5) в аналитическом виде [22]:

$$\psi_n(x)=A\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x), \tag{9}$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита степени n, сравнивалось с волновой функцией ψ(x), рассчитанной по формуле (8), и погрешность численного метода оценивалась с помощью формулы

$$\varepsilon=\max_{x\in\omega}\left|\psi_n(x)-\psi(x)\right|.$$

При вычислении погрешности ε волновая функция (9) нормировалась так же, как и волновая функция $\psi(x)$, т. е. нормировочный множитель A в (9) выбирался таким, чтобы максимальное по абсолютной величине значение волновой функции $\psi_n(x)$ в области решения ω равнялось единице. Очевидно, что точность численного решения зависит от числа узлов в области Ω, т. е. от числа N. На рис. 2 представлены такие зависимости, полученные при значениях кантового числа $n = 0$ (жирная сплошная линия); $n = 2$ (тонкая сплошная линия); $n = 4$ (пунктирная линия).

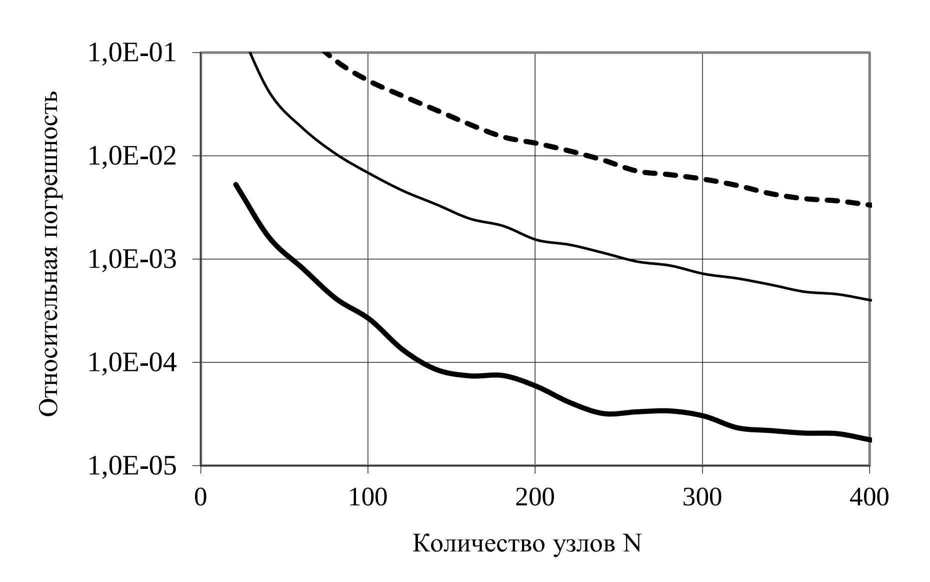


Рис. 2. Зависимость погрешности численного решения для волновой функции от числа узлов N в области решения для разных значений квантового числа n: $n = 0$ (жирная сплошная линия); $n = 2$ (тонкая сплошная линия); $n = 4$ (пунктирная линия)

Таким образом, применение численного фундаментального решения позволяет не только найти волновые функции, т. е. решить уравнение Шредингера, но и установить собственные значения энергии. Точность полученных результатов легко регулируется путем изменения числа узлов N в области решения задачи. Снизить погрешность решения можно также, используя более точный метод численного интегрирования.

Тестовый пример решения двумерной краевой задачи. В качестве второй тестовой задачи решалась задача Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + \lambda U = 0$$

в круговой области ω радиусом r_0. При использовании МТИ заряды, моделирующие искомое поле, располагались на вспомогательной окружности радиусом $R_q = k \cdot r_0$, где постоянная $k > 1$ определяет удаленность моделирующих зарядов от границ области ω. При решении данной тестовой задачи применялись ЧФР для уравнения Гельмгольца, вычисленные с использованием фундаментальных решений для уравнения Лапласа $g(r,R) = \frac{1}{2\pi}\ln|r-R|$. Таким образом, в данной задаче $L = \Delta$ и $l = \lambda$. В качестве области интегрирования Ω в (4) использовался круг радиусом R_0. На геометрические параметры задачи накладывалось условие $r_0 + R_q \le R_0$. Моделировалось поле Гельмгольца точечного заряда, помещенного в точку $\boldsymbol{\rho} = (x_Q, 0)$ на оси X. Известные потенциалы этого поля сравнивались с вычисленными с помощью МТИ при использовании ЧФР значениями, и вычислялась относительная среднеквадратичная погрешность ε решения. При численном интегрировании в уравнении (4) использовались значения подынтегральных функций в узлах равномерной прямоугольной сетки. Количество узлов N сетки, находящихся внутри или на границе области **Ω**, является одним из важнейших параметров задачи, определяющим точность ее решения. Часть этих узлов в количестве N_u находится внутри области решения задачи ω. Другим важным параметром является количество моделирующих зарядов N_q, равномерно располагаемых на вспомогательной окружности. На рис. 3 представлены зависимости среднеквадратичной погрешности ε от количества узлов N_u в области ω. Вычисления производились при следующих значениях параметров: $N_q = 50$; $r_0 = 2$; $k = 1{,}3$; $R_q = k \cdot r_0$; $R_0 = 5$.

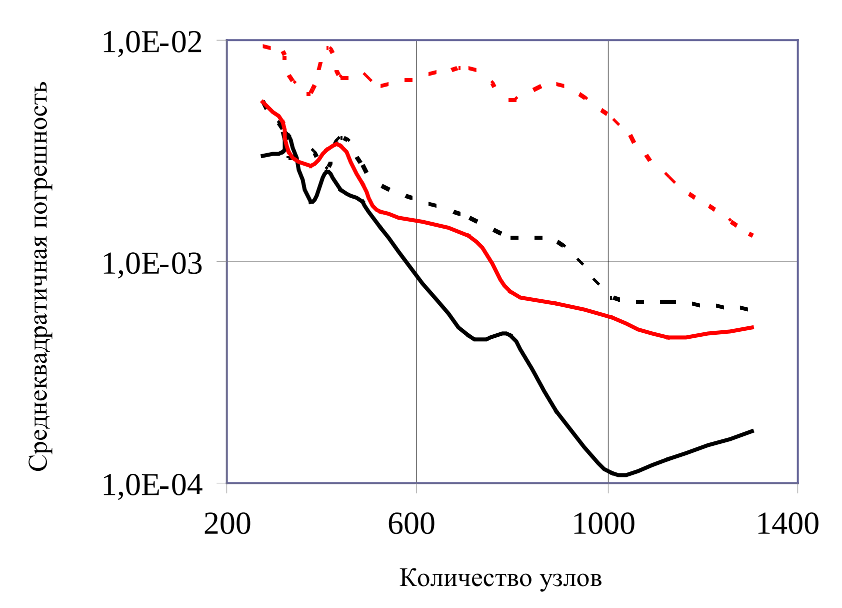


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной погрешности ε от количества узлов N_u в области решения задачи ω для разных значений параметра λ: λ = –0,5 (черная пунктирная линия); λ = –1,0 (черная сплошная линия); λ = 0,5 (красная пунктирная линия); λ = 1,0 (красная сплошная линия)

Кривые, представленные на рис. 3 черным цветом, получены при отрицательных значениях параметра λ: пунктирной линии соответствует λ = –0,5; сплошной линии соответствует λ = –1,0. Кривые, представленные на рис. 3 красным цветом, получены при положительных значениях параметра λ: пунктирной линии соответствует λ = 0,5; сплошной линии соответствует λ = 1,0. Из данных рис. 3 видно, что при решении краевой задачи предложенным способом легко достигается решение с относительной среднеквадратичной погрешностью порядка 10^{-4}–10^{-3}. Этот результат можно считать вполне приемлемым. Кроме того, из рис. 3 видно, что, как и следовало ожидать, погрешность результата убывает с ростом количества узлов N_u в области ω. Можно ожидать, что при использовании более точного, по сравнению с методом прямоугольников, метода численного интегрирования в выражении (4) можно получить более точное численное решение краевой задачи и более быстрое снижение погрешности с ростом числа узлов N_u.

Выводы Рассмотренные выше тестовые примеры подтверждают возможность использования ЧФР при решении краевых задач с помощью МТИ. Особенно эффективно применение предложенного способа при решении задач Дирихле для уравнений со сферически симметричными фундаментальными решениями. Таким свойством обладают, например, фундаментальные решения для уравнений Лапласа и Гельмгольца. В этом случае фундаментальное решение зависит только от величины аргумента, т. е. от длины радиус-вектора **r**, а не от его ориентации. Поэтому в уравнении (4) можно предварительно произвести интегрирование по угловым координатам и получить одномерное интегральное уравнение для численного нахождения функции $u(r)$ и вычисления ЧФР, которое в этом случае представляет собой одномерный массив чисел. Так как после нахождения ЧФР вычисление производных для фундаментальных решений легко производится с помощью соотношений подобных (5), то это делает возможным решение задач Неймана и краевых задач третьего рода. Следует отметить также, что ЧФР, полученные для некоторой области Ω, могут использоваться в МТИ при решении различных краевых задач для различных областей $\omega \subset \Omega$.

Библиографический список

1. Алексидзе, М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М. А. Алексидзе. — Москва : Наука, 1991. — 352 с.

2. Fairweather, G. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems / G. Fairweather, A. Karageorghis // Advances in Computational Mathematics. — 1998. — Vol. 9. — P. 69–95.

3. Alves, C.-J.-S. A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems / C.-J.-S. Alves, C.-S. Chen // Advances in Computational Mathematics. — 2005. — Vol. 23 — P. 125–142.

4. Князев, С. Ю. Устойчивость и сходимость метода точечных источников поля при численном решении краевых задач для уравнения Лапласа / С. Ю. Князев // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2010. — № 3. — С. 3–12.

5. Погрешность метода точечных источников при моделировании потенциальных полей в областях с различной конфигурацией / Ю. А. Бахвалов [и др.] // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2012. — № 5. — С. 17–21.

6. Князев, С. Ю. Сравнительный анализ двух вариантов метода коллокаций при численном моделировании потенциальных полей / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова, А. Н. Заиченко // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2014. — № 1. — С. 17–19.

7. Князев, С. Ю. Решение трехмерных краевых задач для уравнений Лапласа с помощью метода дискретных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2015. — № 5. — С. 25–30.

8. Князев, С. Ю. Метод точечных источников для компьютерного моделирования физических полей в задачах с подвижными границами : дис. … д-ра техн. наук / С. Ю. Князев. — Новочеркасск, 2011. — 342 с.

9. Князев, С. Ю. Компьютерное моделирование потенциальных полей методом точечных источников / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова, А. А. Щербаков. — Ростов-на-Дону : Изд. центр ДГТУ, 2012. — 156 с.

10. Бахвалов, Ю. А. Математическое моделирование физических полей методом точечных источников / Ю. А. Бахвалов, С. Ю. Князев, А. А. Щербаков // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2008. — Т. 72, № 9. — С. 1259–1261.

11. Князев, С. Ю. Решение задач тепло- и массопереноса с помощью метода точечных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. — 2006. — № 4. — С. 43–47. — (Технические науки).

12. Князев, С. Ю. Численное исследование стабильности термомиграции плоских зон / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2007. — № 1. — С. 14–19.

13. Князев, С. Ю. Сравнительный анализ различных вариантов использования метода точечных источников поля при моделировании температурных полей / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова, А. А. Щербаков // Физико-математическое моделирование систем : мат-лы XII междунар. семинара. — Воронеж : Воронеж. гос. техн. ун-т, 2014. — С. 52–56.

14. Исследование стабильности термомиграции ансамбля линейных зон с помощью трехмерной компьютерной модели, построенной на основе метода точечных источников поля / Л. С. Лунин [и др.] // Вестник Южного научного центра. — 2015. — Т. 11, № 4. — С. 9–15.

15. Князев, С. Ю. Моделирование полей упругих деформаций с применением метода точечных источников / С. Ю. Князев, В. Н. Пустовойт, Е. Е. Щербакова // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2015. — Т. 15, № 1 (80). — С. 29–38.

16. Моделирование трехмерных полей упругих деформаций с помощью метода точечных источников / С. Ю. Князев [и др.] // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2015. — Т. 15, № 4 (83). — С. 13–23.

17. Князев, С. Ю. Математическое моделирование полей упругих деформаций методом точечных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова, А. А. Щербаков // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ. — 2015. — № 5 (75). — С. 21–23.

18. Князев, С. Ю. Численное решение краевых задач для уравнения Пуассона методом точечных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова, А. А. Енгибарян // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2014. — Т. 14, № 2 (77). — С. 15–20.

19. Князев, С. Ю. Численное решение уравнений Пуассона и Гельмгольца с помощью метода точечных источников / С. Ю. Князев // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2007. — № 2. — С. 77–78.

20. Князев, С. Ю. Численное решение краевых задач для неоднородных уравнений Гельмгольца методом точечных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова, А. Н. Заиченко // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2014. — № 4. — С. 14–19.

21. Князев, С. Ю. Применение метода точечных источников поля при численном решении задач на собственные значения для уравнения Гельмгольца / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2016. — № 3 (545). — С. 11–17.

22. Ландау, Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Наука, 1963. — 703 с.

23. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. — 2-е изд., стереотип. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 400 с.

References

1. Alexidze, M.A. Fundamental'nye funktsii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach. [Fundamental functions in approximate solutions of boundary value problems.] Moscow: Nauka, 1991, 352 p. (in Russian).

2. Fairweather, G., Karageorghis, A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. Advances in Computational Mathematics, 1998, vol. 9, pp. 69–95.

3. Alves, C.-J.-S., Chen, C.-S. A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems. Advances in Computational Mathematics, 2005, vol. 2, pp. 125–142.

4. Knyazev, S.Yu. Ustoychivost' i skhodimost' metoda tochechnykh istochnikov polya pri chislennom reshenii kraevykh zadach dlya uravneniya Laplasa. [Stability and Convergence of Point-Source Field Method at Numerical Solution to Boundary Value Problems for Laplace Equation.] Russian Electromechanics, 2010, no. 3, pp. 3–12 (in Russian).

5. Bakhvalov, Y.A., et al. Pogreshnost' metoda tochechnykh istochnikov pri modelirovanii potentsial'nykh poley v oblastyakh s razlichnoy konfiguratsiey. [Errors of Point Source Method under Simulation of Potential Fields in Areas with Different Shape Configuration.] Russian Electromechanics, 2012, no. 5, pp. 17–21 (in Russian).

6. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E., Zaichenko, A.N. SRAVNITEL'NYY ANALIZ DVUKH VARIANTOV METODA KOLLOKATSIY PRI CHISLENNOM MODELIROVANII POTENTSIAL'NYKH POLEY. [A Comparative Analysis of Two Variants of the Collocation in Numerical Modeling of Potential Fields.] Russian Electromechanics, 2014, no. , pp. 17–19 (in Russian).

7. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E. Reshenie trekhmernykh kraevykh zadach dlya uravneniy Laplasa s pomoshch'yu metoda diskretnykh istochnikov polya. [The Decision of the Three-Dimensional Boundary Value Problems for the Laplace Equation Using the Method of Discrete Sources of the Field.] Russian Electromechanics, 2015, no. 5, pp. 25–30 (in Russian).

8. Knyazev, S.Yu. Metod tochechnykh istochnikov dlya komp'yuternogo modelirovaniya fizicheskikh poley v zadachakh s podvizhnymi granitsami : dis. … d-ra tekhn. nauk. [Point-source method for computer modeling of physical fields in problems with moving boundaries: Dr.Sci. (Eng.) diss.] Novocherkassk, 2011, 342 p. (in Russian).

9. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E., Shcherbakov, A.A. Komp'yuternoe modelirovanie potentsial'nykh poley metodom tochechnykh istochnikov. [Computer modeling of potential fields by point-source method.] Rostov-on-Don: DSTU Publ. Centre, 2012, 156 p. (in Russian).

10. Bakhvalov, Yu.A., Knyazev, S.Yu., Shcherbakov, A.A. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh poley metodom tochechnykh istochnikov. [Mathematical modeling of physical fields by a method of dot sources.] Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2008, vol. 72, no. 9, pp. 1259–1261 (in Russian).

11. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E. Reshenie zadach teplo- i massoperenosa s pomoshch'yu metoda tochechnykh istochnikov polya. [Solution to heat and mass transfer problems by field point source method.] University News. North-Caucasian region. Technical Sciences Series, 2006, no. 4, pp. 43–47 (in Russian).

12. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E. Chislennoe issledovanie stabil'nosti termomigratsii ploskikh zon. [Numerical study of stability of flat bands thermomigration.] Russian Electromechanics, 2007, no. 1, pp. 14–19 (in Russian).

13. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E., Shcherbakov, A.A. Sravnitel'nyy analiz razlichnykh variantov ispol'zovaniya metoda tochechnykh istochnikov polya pri modelirovanii temperaturnykh poley. [Comparative analysis of different use cases of field point source method under simulation of temperature fields.] Fiziko-matematicheskoe modelirovanie sistem: mat-ly XII mezhdunar. seminara. [Physico- mathematical system modeling: Proc. XII Int. Workshop.] Voronezh: Voronezh State Technical University, 2014, pp. 52–56 (in Russian).

14. Lunin, L.S., et al. Issledovanie stabil'nosti termomigratsii ansamblya lineynykh zon s pomoshch'yu trekhmernoy komp'yuternoy modeli, postroennoy na osnove metoda tochechnykh istochnikov polya. [The study of stability of thermomigration of an ensemble of linear zones using a three-dimensional computer model constructed on the basis of the field point sources method.] Vestnik SSC RAS, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 9–15 (in Russian).

15. Knyazev, S.Yu., Pustovoyt, V.N., Shcherbakova, E.E. Modelirovanie poley uprugikh deformatsiy s primeneniem metoda tochechnykh istochnikov. [Modeling the elastic strain fields by point-source method.] Vestnik of DSTU, 2015, vol. 15, no. 1 (80), pp. 29–38 (in Russian).

16. Knyazev, S.Yu. , et al. Modelirovanie trekhmernykh poley uprugikh deformatsiy s pomoshch'yu metoda tochechnykh istochnikov.[Modeling of three-dimensional elastic strain fields by point-source method.] Vestnik of DSTU, 2015, vol. 15, no. 4 (83), pp. 13–23 (in Russian).

17. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E., Shcherbakov, A.A. Matematicheskoe modelirovanie poley uprugikh deformatsiy metodom tochechnykh istochnikov polya. [Mathematical modeling of elastic deformation fields by field point source method.] Mathematical Methods in Engineering and Technologies-MMTT, 2015, no. 5 (75), pp. 21–23 (in Russian).

18. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E., Yengibaryan, A.A. Chislennoe reshenie kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona metodom tochechnykh istochnikov polya. [Numerical solution to boundary problems for Poisson equation by point-source method.] Vestnik of DSTU, 2014, vol. 14, no. 2 (77), pp. 15–20 (in Russian).

19. Knyazev, S.Yu. Chislennoe reshenie uravneniy Puassona i Gel'mgol'tsa s pomoshch'yu metoda tochechnykh istochnikov. [Numerical solution to Poisson and Helmholtz equations using point source method.] Russian Electromechanics, 2007, no. 2, pp. 77–78 (in Russian).

20. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E., Zaichenko, A.N. Chislennoe reshenie kraevykh zadach dlya neodnorodnykh uravneniy Gel'mgol'tsa metodom tochechnykh istochnikov polya. [Numerical Solution of the Boundary Problems with Non-Homogeneous Helmholtz Equation by Field Point-Source Method.] Russian Electromechanics, 2014, no. 4, pp. 14–19 (in Russian).

21. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E. Primenenie metoda tochechnykh istochnikov polya pri chislennom reshenii zadach na sobstvennye znacheniya dlya uravneniya Gel'mgol'tsa. [The Numerical Eigenvalue Problems Solution for the Helmholtz Equation Using the Point Sources Method] Russian Electromechanics, 2016, no. 3 (545), pp. 11–17 (in Russian).

22. Landau, L.D., Lifshits, E.M. Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya. [Quantum Mechanics. Nonrelativistic theory.] Moscow: Nauka, 1963, 703 p. (in Russian).

23. Vladimirov, V.S., Zharinov, V.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. [Equations of Mathematical Physics] 2nd ed. Moscow: FIZMATLIT, 2004, 400 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 18.07.2016
Сдана в редакцию 18.07.2016
Запланирована в номер 30.09.2016

Received 18.07.2016
Submitted 18.07.2016
Scheduled in the issue 30.09.2016